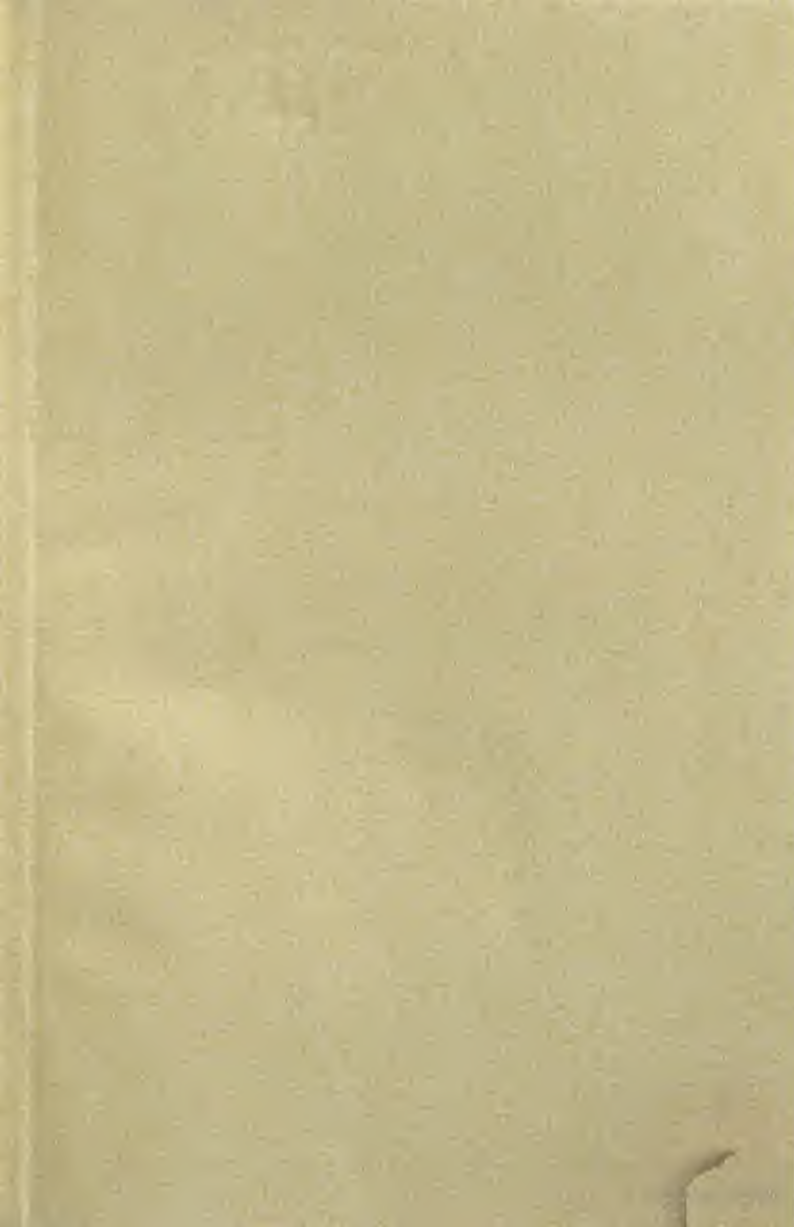
TEORICA DELL'ATTRAZIONE DELLE SFERE ESPOSTA CON ANALISI...

Angelo Forti

A. FORTI

TEORICA

DELL' ATTRAZIONE DELLE SFERE

ESPOSTA CON ANALISI ELEMENTARE

TEORICA

DELL' ATTRAZIONE DELLE SFERE

ESPOSTA CON ANALISI ELEMENTARE

DAL DOTT. A. FORTI

PROF. DI ALGEBRA E MECCANICA

AL R. LICEO DI PISA

(**NOTA** *aggiunta alle* **Lezioni elementari di Meccanica** *ad uso dei Regii Licei dello stesso Autore*)

PISA

TIPOGRAFIA NISTRI

1866

AVVERTIMENTO

L'analisi infinitesimale è il mezzo più idoneo a dimostrare la teorica dell'attrazione delle sfere; non di meno con la geometria elementare si perviene agli stessi risultati, come lo ha provato l'illustre Newton nel suo aureo libro dei *Principii*.

Nelle mie *Lezioni elementari di Meccanica*, ho esposta questa teorica di Newton, così per la sua eleganza, come pel vincolo intimo ch'essa ha con la gravitazione e le leggi di Keplero. Ma essendomi prefisso in quelle *Lezioni*, per le ragioni che vi sono dichiarate, di dimostrare tutti i principii della Meccanica con l'analisi elementare algebrica, ho pensato di valermi di questo mezzo in una seconda esposizione del presente subbietto, la quale, sembrandomi rigorosa e utile ad un tempo ai giovani, che si dirigono alle scienze esatte, offro come *Nota* alle medesime.

Il Lettore vedrà emergere qui facilmente da un' unica formula generale, le conclusioni che spettano a tutte le posizioni relative del punto attratto; se non che mi sono stati indispensabili degli artifizii di calcolo e varie costruzioni geometriche, onde evitare le integrazioni, che trascendono gl' insegnamenti matematici dei nostri Regii Licei, pei quali, in ispeciale maniera, il mio libro è destinato.

Di Pisa Aprile 1866.

A. FORTI.

TEORICA

DELL'ATTRAZIONE DELLE SFERE

1.

Proponiamoci di calcolare l'attrazione di una sfera su di un punto esterno (*Fig, 1*). Per la nota legge di Newton, fra ogni molecola della sfera ed il punto esterno si esercita un'attrazione in ragione diretta del prodotto delle masse ed inverso al quadrato della loro distanza reciproca. Se tutti i punti della sfera fossero ugualmente distanti dal punto esterno attratto, l'attrazione totale sarebbe uguale al prodotto della massa del punto attratto per la massa della sfera, diviso pel quadrato della comune distanza. Ma le molecole della sfera trovandosi a diverse distanze dal punto attratto, alcune l'attrarranno di più, altre di meno, sì che la risultante di tutte queste azioni non si può scorgere a priori. Si tratta di avere l'espressione di questa risultante.

Chiamiamo μ la massa del punto fisico esterno P; Δm quella di una molecola della sfera attraente; r la loro distanza scambievole. La forza di attrazione fra queste due masse, sarà, per la legge rammentata di Newton, espressa da

$$(a) \qquad -g\frac{\mu\,\Delta m}{r^2} \quad ,$$

avendo indicato con g l'attrazione di due masse unitarie, concentrate in due punti posti alla distanza reciproca *uno*. Ho applicato il segno —, per indicare che l'attrazione tende a fare diminuire la distanza scambievole dei due punti. La somma delle espressioni (a), estesa a tutti gli elementi della sfera, ci darà l'espressione dell'attrazione di tutta la sfera sul punto P.

Uno degli artifizii essenziali nel prendere queste somme, le quali nel calcolo sublime diconsi *integrali*, sta nella scelta del modo di dividere le linee, le superficie o i volumi nei loro elementi infinitesimi. Una scelta giudiziosa dell'elemento può far pervenire a siffatto genere di somme con processi chiari e pronti. L'elemento stesso preso sotto forma diversa, renderebbe invece queste somme complicate, prolisse e di oscura percezione. Ecco il modo che mi è sembrato migliore per ottenere l'elemento della sfera.

2.

Immaginiamo divisa la sfera $A\omega B$ in tanti strati sferici concentrici sottilissimi. Il punto P sia il vertice di un numero indefinito di coni circolari retti tutti aventi per asse la retta PC, che congiunge il punto P col centro C della sfera. Il primo di questi coni si confonde coll'asse; e l'ultimo, che è il più ampio, risulta tangente alla sfera $A\omega B$. Immaginiamo altresì il piano del circolo generatore $A\omega B$ in tutte le sue successive posizioni infinitamente vicine tra loro. Questi piani intersecando gli strati sottilissimi conici, somministrano tante specie di piramidi quadrangolari $P E'' F'' G'' D''$, i cui quattro angoli al vertice P saranno infinitesimi. Un piano $E'' F'' C'$ perpendicolare all'asse, condotto per un suo punto qualunque C', taglierà cia-

scuna piramide secondo un quadrilatero E″ F″ G″ D″ composto di due lati rettilinei E″ D″, F″ G″ concorrenti in C′ e di due archi circolari simili F″ E″, G″ D″. La (*Fig. 2*) mostra le intersezioni delle superficie coniche e dei piani meridiani sopra il piano E″ F″ C′ e quindi le basi di tutte le piramidi.

Per fissare le idee, consideriamo la piramide P E″ F″ G″ D″; essa andrà a segare lo strato sferico A′ A″ secondo i due elementi G N , G′ N′. L'uno e l'altro di questi elementi, sarà quello che è rappresentato da Δm nella formula (*a*).

3.

Per ritrovare l'espressione analitica degl'indicati elementi, prendiamo per origine delle coordinate il punto P; per asse delle x, la PC; poniamo $PC = a$ ed il raggio CA della sfera $= R$.

L'equazione della superficie sferica A B C sarà, per questa disposizione,

$$(b) \qquad (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \ .$$

Questa equazione apparterrà egualmente a qualunque degli strati sferici concentrici, in cui abbiamo supposta suddivisa la sfera; con che però ad R si sostituiscano i raggi k corrispondenti; talchè k potrà variare da

$$k = 0 \quad \text{sino a} \quad k = R \ .$$

L'involto A′ B′ D′ avrà dunque per equazione

$$(1) \qquad (x-a)^2 + y^2 + z^2 = k^2 \ .$$

Una delle costole P D″ della piramide indicata, farà gli angoli α , β , γ coi tre assi ortogonali Px , Py , Pz; rappresentando con ρ una porzione PD della PD″ e chiamando X , Y , Z le coordinate del punto D , l'equazioni della PD″ saranno

$$(2) \qquad \frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma} = \rho \ .$$

È evidente che pel punto d'intersezione della PD″ con la superficie (1), le coordinate saranno comuni, onde se stabiliremo che

$$X = x \quad ; \quad Y = y \quad ; \quad Z = z \quad ,$$

avremo espresso in analisi che ρ rappresenta la distanza da P del punto d'intersezione di PD″ con la superficie sferica A′D′B′. Con ciò le (2) diverranno

$$(2') \qquad \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} = \rho \quad .$$

Eliminando ora x, y, z tra (1) e le (2′), avremo

$$(3) \qquad \rho^2 - 2a\rho\cos\alpha + a^2 - k^2 = 0 \quad ,$$

equazione del 2.° grado in ρ, che ci dà la distanza dal punto P dei *due* punti D e D′ d'intersezione di PD″ con la superficie A′D′B′.

Risolvendo la (3), ricaviamo

$$(3') \quad \begin{cases} \rho_1 = \text{PD} = a\cos\alpha - \sqrt{k^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\alpha} \\ \rho_2 = \text{PD}' = a\cos\alpha + \sqrt{k^2 - a^2\,\text{sen}^2\,\alpha} \end{cases} .$$

Ora siamo al caso di esprimere facilmente l'elemento GN, ovvero G′N′, in funzione delle quantità che abbiamo introdotto in calcolo.

4.

Immaginiamo dal punto P, come centro, descritta una sfera con un raggio PS′ uguale all'unità. Denominiamo Δs l'elemento *mm′nn′* della superficie di questa sfera, intercettato dalla piramide PG″D″E″F″; indi immaginiamo due superficie sferiche concentriche ad essa passanti rispettivamente, per D e D′. L'elemento della superficie sferica PD intercetto dalla piramide, sarà espresso da $\rho_1^2 \Delta s$ e quello dell'altra PD′ da

$\rho_2^2 \Delta s$. Ora l'involucro sferico avendo una grossezza infinitamente piccola, ci è lecito di riguardare i due elementi GN, G'N' come due prismi obliqui, lo spigolo del primo essendo $DM = -\Delta\rho_1$ e quello del secondo, $D'M' = \Delta\rho_2$. Il segno — apposto al $\Delta\rho_1$, risulta dalla convenzione che l'accrescimento $\Delta\rho$ del raggio va preso col segno *negativo* quando è diretto nel verso del suo decrescere, cioè dalla superficie esterna alla interna: e *positivo* quando procede in verso contrario. I volumi dei prismi obliqui, potendosi valutare col prodotto della projezione della loro base su di un piano perpendicolare allo spigolo, per la lunghezza di questo spigolo, avremo

$$\text{vol GN} = -\rho_1^2 \Delta s\, \Delta\rho_1 \quad ; \quad \text{vol G'N'} = \rho_2^2 \Delta s\, \Delta\rho_2 \quad .$$

Moltiplicando questi volumi per la densità δ dello strato sferico, si avranno le masse dei due elementi espresse così

$$\Delta m_1 = -\delta\rho_1^2 \Delta s\, \Delta\rho_1 \quad ; \quad \Delta m_2 = \delta\rho_2^2 \Delta s\, \Delta\rho_2 \quad ;$$

e questi saranno i valori che dovremo sostituire a Δm nella equazione (a); se non che in luogo di r dovremo porre

$$PD = \rho_1 \quad \text{pel primo elemento e}$$
$$PD' = \rho_2 \quad \text{pel secondo.}$$

Con ciò le attrazioni rispettive A_1 ed A_2 di questi due elementi sul punto P saranno espresse da

$$A_1 = g\mu\delta\Delta s\Delta\rho_1 \quad ; \quad A_2 = -g\mu\delta\Delta s\Delta\rho_2 \quad .$$

Per avere i valori di $\Delta\rho_1$ e $\Delta\rho_2$, osservo che ponendo per un istante

$$a\cos\alpha = M \quad ; \quad \sqrt{k^2 - a^2 \,\text{sen}^2\alpha} = N \quad ,$$

le (3') divengono

$$(3'') \qquad \rho = M \pm N \quad .$$

Dando a k un accrescimento piccolo Δk, la N diverrà $N + \Delta N$; e quindi ρ diverrà $\rho + \Delta\rho$; onde la (3'') prenderà la forma

$$\rho + \Delta\rho = M \pm (N + \Delta N) \quad ;$$

da cui e dalla (3″) ,

$$(c) \qquad \Delta\rho = \pm \Delta N \quad .$$

D' altronde

$$N^2 = k^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$(N + \Delta N)^2 = (k + \Delta k)^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \quad ;$$

sviluppando, riducendo e notando che Δk^2 e quindi ΔN^2 si possono trascurare come quantità piccolissime rispetto a Δk e ΔN, avremo

$$2 N \Delta N = 2 k \Delta k \quad ;$$

da cui

$$\Delta N = \frac{k}{N} \Delta k \quad ,$$

che sostituito in (c), darà

$$\Delta \rho = \pm \frac{k}{N} \Delta k \quad ,$$

e quindi, per l' osservazione precedente,

$$\Delta \rho_1 = - \frac{k}{N} \Delta k \quad , \quad \Delta \rho_2 = + \frac{k}{N} \Delta k \quad ,$$

e perciò

$$A_1 = - g \mu \delta \frac{k}{N} \Delta k \Delta s \quad ; \quad A_2 = - g \mu \delta \frac{k}{N} \Delta k \Delta s \quad ;$$

e ponendo per semplicità

$$C = - g \mu \quad ,$$

$$A_1 = C \delta \frac{k}{N} \Delta k \Delta s \quad ; \quad A_2 = C \delta \frac{k}{N} \Delta k \Delta s \quad .$$

Per esprimere l'elemento Δs, immaginiamo che la retta PD″ faccia un angolo θ con l'asse delle x e che la sua projezione sul piano zy faccia un' angolo ω con l'asse della z. Per semplicità colloco la retta PD″ sul piano zx, così che la sua projezione su zy, coinciderà con l'asse PZ. L'altro spigolo PG″ della piramide farà, per la costruzione stabilita, lo stesso

angolo θ con l'asse delle x e la sua projezione su zy farà un angoletto infinitesimo $\Delta\omega$ con l'asse delle z.

La sfera PS' essendo descritta con raggio unitario, avremo

$$\overset{\wedge}{\Delta\omega} = \widehat{SS'} \quad ;$$

e siccome l'archetto infinitesimo $m'n'$ è simile ad $\widehat{SS'}$ ed ha per raggio

$$m'p = \operatorname{sen}\theta \quad ,$$

avremo

$$m'n' = \Delta\omega \,.\, \operatorname{sen}\theta \quad ;$$

e poichè l'archetto $mm' = \Delta\theta$, avremo per valore dell'elemento $mm'nn' = \Delta s$, l'espressione seguente

$$\Delta s = \operatorname{sen}\theta \,.\, \Delta\omega \,.\, \Delta\theta \quad ,$$

e quindi

$$A_1 = C\,\delta k\,\Delta k\,\frac{\operatorname{sen}\theta\,.\,\Delta\theta\,.\,\Delta\omega}{N} \quad ; \quad A_2 = C\,\delta k\,\Delta k\,\frac{\operatorname{sen}\theta\,.\,\Delta\theta\,.\,\Delta\omega}{N} \quad ;$$

dal che si vede che le due attrazioni sono eguali, e che la minore estensione dell'elemento GN rispetto a quella dell'altro G'N', viene compensata dalla sua maggiore vicinanza al punto attratto P.

5.

Decomponiamo ora le attrazioni di ciascuno dei due elementi secondo i tre assi Px, Py, Pz; siccome questi elementi sono infinitesimi, si può ammettere che le loro forze sul punto P facciano con gli assi gli stessi angoli α, β, γ, che fa con questi lo spigolo PD''.

Ciò posto, le componenti dell'attrazione del primo elemen-

to G N , saranno

$$(4) \quad \begin{cases} C\delta k \Delta k \dfrac{\cos\alpha \operatorname{sen}\theta \Delta\theta \Delta\omega}{N} \quad , \\ C\delta k \Delta k \dfrac{\cos\beta \operatorname{sen}\theta \Delta\theta \Delta\omega}{N} \quad , \\ C\delta k \Delta k \dfrac{\cos\gamma \operatorname{sen}\theta \Delta\theta \Delta\omega}{N} \quad , \end{cases}$$

e per l'altro elemento, si avranno tre espressioni identiche a queste.

Immaginiamo il cono che ha P per vertice, per asse Px e che involge tangenzialmente la superficie sferica A′ D′ B′ ; il cerchio C T di contatto dividerà questo involucro in due callotte; una minore nella parte più vicina al punto P, l'altra maggiore nella parte opposta. La prima contiene tutti gli elementi GN ; la seconda tutti gli altri G′N′. Per avere le tre componenti dell'attrazione della cappa minore sul punto, basterà prendere la somma delle (4) per tutti i valori di ω, da 0 a 2π e per tutti i valori di θ, da $\theta = 0$ a $\theta = \varphi$, dove φ è l'angolo che la generatrice PT di contatto fa con l'asse Px. Infatti quando tengo fermo l'ω e prendo le somme delle (4) per tutti i valori di θ da 0 a φ, vengo ad ottenere le azioni di tutte le molecole dell'arco fisico A′T; quando poi do ad ω tutti i valori da 0 a 2π e sommo, vengo ad ottenere la somma delle attrazioni di tutti gl'infiniti archi A T, che compongono la cappa minore.

Il valore di φ si ottiene facilmente, osservando che per esso corrisponde $\rho_1 = \rho_2$, ossia l'annichilamento del radicale dei valori (3′), e quindi

$$k^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 0 \quad ;$$

da cui

$$(d) \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{k}{a} \quad ,$$

tenendo conto soltanto del valore positivo di sen φ, poichè quando il punto è esterno, l'angolo φ non può superare 180°.

Giova nel nostro caso di esprimere $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, in funzione di θ e di ω. Considerando perciò il triangolo sferico ABD (*Fig. 3*), si ha dalla trigonometria

$$\cos \widehat{BD} = \cos \widehat{AD} \cos \widehat{AB} + \operatorname{sen} \widehat{AD} \operatorname{sen} \widehat{AB} \cos D\hat{A}B \quad ;$$

e poichè nel nostro caso

$$\widehat{BD} = \beta \quad ; \quad \widehat{AD} = \theta \quad ; \quad \widehat{AB} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad D\hat{A}B = \omega \quad ,$$

essa si riduce alla seguente:

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\theta \cos\omega \quad .$$

Così pure dal triangolo sferico AED, si ha

$$\cos \widehat{ED} = \cos \widehat{AE} \cos \widehat{AD} + \operatorname{sen} \widehat{AE} \operatorname{sen} \widehat{AD} \cos D\hat{A}E \quad .$$

Per noi

$$\widehat{ED} = \gamma \quad ; \quad \widehat{DA} = \alpha = \theta \quad ; \quad \widehat{AE} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad D\hat{A}E = \frac{\pi}{2} - \omega \; ;$$

onde

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \quad ;$$

quindi le tre componenti (4) si ridurranno

$$C\delta k \,\Delta\, k \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\Delta\theta\, \Delta\omega}{N} \quad ;$$

$$C\delta k \,\Delta\, k \frac{\operatorname{sen}^2\theta \cos\omega \,\Delta\theta\, \Delta\omega}{N} \quad ;$$

$$C\delta k \,\Delta\, k \frac{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\omega \,\Delta\theta\, \Delta\omega}{N} \quad .$$

Dinotando con X, Y, Z, le tre componenti dell' attrazione

risultante di tutta la prima cappa sul punto P, si avrà

$$X = C\delta k \Delta k \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta \Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}} \sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta\omega \quad ;$$

$$Y = C\delta k \Delta k \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}} \sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \cos\omega \Delta\omega \quad ;$$

$$Z = C\delta k \Delta k \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}} \sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \operatorname{sen}\omega \Delta\omega \quad .$$

Eseguiamo le somme rispetto ad ω.

È chiaro che

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta\omega = 2\pi \quad .$$

Per avere il valore di $\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \cos\omega \Delta\omega$, osservo che

$$\operatorname{sen}(\omega+\Delta\omega) = \operatorname{sen}\omega \cos\Delta\omega + \operatorname{sen}\Delta\omega \cos\omega \quad ,$$

e, stante la piccolezza di $\Delta\omega$, si può porre

$$\cos\Delta\omega = 1 \quad ; \quad \operatorname{sen}\Delta\omega = \Delta\omega \quad ;$$

onde

$$\operatorname{sen}(\omega+\Delta\omega) = \operatorname{sen}\omega + \Delta\omega \cos\omega \quad ,$$

da cui

$$\operatorname{sen}(\omega+\Delta\omega) - \operatorname{sen}\omega = \Delta\omega \cos\omega \quad ;$$

per cui

$$\Delta\omega \cos\omega = \Delta \operatorname{sen}\omega \quad ;$$

quindi

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \cos\omega \, \Delta\omega = \sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta \operatorname{sen}\omega \quad .$$

Ora, come è evidente dalla (*Fig. 4*), gli aumenti successivi del sen ω al crescere di ω, ossia i Δ sen ω, sono i segmenti $M'O'$, $M''O''$, $M'''O'''$ ec., sì che si ha

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \Delta \operatorname{sen}\omega = M''''C \quad .$$

Per la stessa ragione

$$\sum_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=\pi} \Delta \operatorname{sen}\omega = M''''C \; ; \; \sum_{\omega=\pi}^{\omega=\frac{3}{2}\pi} \Delta \operatorname{sen}\omega = mC \; ; \; \sum_{\omega=\frac{3}{2}\pi}^{\omega=2\pi} \Delta \operatorname{sen}\omega = mC \; ;$$

talchè, notando che

$$mC = -M''''C \quad ,$$

avremo

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta \operatorname{sen}\omega = M''''C + M''''C - M''''C - M''''C = 0$$

e quindi

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \cos\omega \, \Delta\omega = 0 \quad .$$

Parimente abbiamo

$$\cos(\omega + \Delta\omega) = \cos\omega \cos\Delta\omega - \mathrm{sen}\,\omega\, \mathrm{sen}\,\Delta\omega$$
$$= \cos\omega - \Delta\omega\, \mathrm{sen}\,\omega$$

onde

$$\cos(\omega + \Delta\omega) - \cos\omega = -\Delta\omega\, \mathrm{sen}\,\omega \quad ;$$

ossia

$$\Delta\cos\omega = -\Delta\omega\, \mathrm{sen}\,\omega \quad ;$$

quindi

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \mathrm{sen}\,\omega\,.\,\Delta\omega = \sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta\cos\omega \quad ;$$

e per un ragionamento affatto simile al precedente si vede che

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \Delta\cos\omega = -\mathrm{AC} + \mathrm{BC} - \mathrm{BC} + \mathrm{AC} = 0$$

per cui

$$\sum_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \mathrm{sen}\,\omega\,\Delta\omega = 0 \quad ;$$

onde le tre componenti X, Y, Z, diverranno

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X} = \mathrm{C}\,.\,2\pi k \Delta k \displaystyle\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, \Delta\theta}{\sqrt{k^2 - a^2\, \mathrm{sen}^2\,\theta}} \quad , \\ \mathrm{Y} = 0 \quad , \\ \mathrm{Z} = 0 \quad ; \end{array} \right.$$

le due componenti perpendicolari all'asse Px, che congiunge il punto attratto col centro dello strato sferico, sono dunque

nulle, ciò che d'altronde poteva vedersi a priori; poichè, tutto essendo simmetrico intorno a questo asse, le componenti da un lato devono distruggere quelle del lato opposto.

Per avere il valore del $\sum\limits_{\theta=0}^{\theta=\varphi}$ contenuto nel valore di X, conviene osservare che

$$(k^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{\frac{1}{2}}=k-\tfrac{1}{2}\,k^{-1}\,a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta-\tfrac{1}{8}\,k^{-3}\,a^4\mathrm{sen}^4\,\theta-\text{ec.}$$

$$\{k^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,(\theta+\Delta\theta)\}^{\frac{1}{2}}=k-\tfrac{1}{2}\,k^{-1}a^2\mathrm{sen}^2\,(\theta+\Delta\theta)-\tfrac{1}{8}k^{-3}a^4\mathrm{sen}^4(\theta+\Delta\theta)-\text{ec.}$$

$$=k-\tfrac{1}{2}\,k^{-1}\,a^2(\mathrm{sen}\,\theta+\Delta\theta\cos\theta)^2$$

$$-\tfrac{1}{8}\,k^{-3}\,a^4(\mathrm{sen}\,\theta+\Delta\theta\cos\theta)^4-\text{ec.}$$

$$=k-\tfrac{1}{2}\,k^{-1}\,a^2\,(\mathrm{sen}^2\theta+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Delta\theta)$$

$$-\tfrac{1}{8}\,k^{-3}\,a^4\,(\mathrm{sen}^4\theta+4\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta\,\Delta\theta)-\text{ec.}\;,$$

avendo trascurate le potenze di $\Delta\theta$ superiori alla lineare.

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, avremo

$$\Delta(k^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{\frac{1}{2}}=-k^{-1}\,a^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta\,\Delta\theta-\tfrac{1}{2}\,k^{-3}a^4\,\mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta\,\Delta\theta-\text{ec.}$$

$$=-a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Delta\theta\,(k^{-1}+\tfrac{1}{2}\,k^{-3}\,a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\text{ec.})$$

$$=-a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Delta\theta\,\frac{1}{\sqrt{k^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}\;,$$

e di qui

$$-\frac{1}{a^2}\,\Delta\,(k^2-a^2\mathrm{sen}^2\,\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Delta\,\theta}{\sqrt{k^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}\;\;;$$

e prendendo le somme, si trova

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta \,\Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = -\frac{1}{a^2} \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta} \quad .$$

Il valore del $\sum$ del secondo membro ci viene dato da una semplice costruzione geometrica. Nel circolo di raggio A′C=k (*Fig.* 5), si tirino: il raggio CD al punto D di sua intersezione con lo spigolo PD′; la perpendicolare CO a questo spigolo e il raggio CT al punto T di contatto di PT; avremo

$$\mathrm{DO} = \sqrt{\mathrm{DC}^2 - \mathrm{CO}^2} = \sqrt{k^2 - \mathrm{CO}^2} \quad .$$

Dal triangolo rettangolo PCO si ha

$$\mathrm{CO} = \mathrm{PC} \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{sen}\theta \quad ,$$

onde

$$\mathrm{DO} = \sqrt{k^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} \quad ,$$

ciò che dà

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\,\mathrm{DO} \quad .$$

Ora siccome quando $\theta=0$, si ha DO=k, e che al crescere di θ, esso decresce sino al punto che per $\theta=\varphi$ diviene nullo; questo ci dice che $\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\mathrm{DO}$ è tale quantità che annichila k; in altri termini, che essa è uguale a $-k$, dunque

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\,\mathrm{DO} = \sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \Delta\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = -k \quad ,$$

quindi

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta \,\Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}} = +\frac{k}{a^2} \quad ;$$

sostituendo questo valore in (5), avremo

$$(6) \qquad X = C\delta 2\pi \frac{k^2 \Delta k}{a^2} \quad , \quad Y=0 \quad , \quad Z=0 \quad .$$

Si vedrà facilmente che applicando al calcolo delle componenti dell'attrazione di ciascun punto dell' altro segmento dell' involucro sferico, le formule (4), esse devono condurre agli stessi valori (6) di X, Y, Z, poichè le formule sono le stesse ed i limiti dei $\sum$ sono pure gli stessi.

Abbiamo dunque questo teorema: che *dividendo l'involucro sferico in due callotte, per mezzo del circolo di contatto di un cono tangente, avente per vertice il punto attratto, esse esercitano eguale attrazione sul punto; la minore estensione dell'una, venendo compensata dalla sua minore distanza da esso.*

Per avere l'attrazione totale dell' intiero involucro, dovremo dunque doppiare i risultati (6), sì che avremo:

$$(6' \qquad X = C\delta 4\pi \frac{k^2}{a^2} \Delta k \quad ; \quad Y=0 \quad ; \quad Z=0 \quad .$$

Dalla geometria elementare sappiamo che $4\pi k^2$ rappresenta la superficie sferica, che ha per raggio k, ossia la superficie dell' involucro A'E'B'T'; Δk denota la sua grossezza minima A'A", e quindi $\delta 4\pi k^2 \Delta k$, la sua massa. La componente X, essendo dunque proporzionale a questa massa divisa per a^2, cioè pel quadrato della distanza del centro C

dell'involucro dal punto attratto, ci dimostra che *l'attrazione dell'involucro è tale, come se tutta la sua massa fosse raccolta nel centro* C.

6.

Le formule (4) che abbiamo impiegate per l'attrazione di uno strato sferico sopra un punto esterno, sono egualmente applicabili ad un punto sulla superficie della medesima e ad un punto interno. La sola differenza sta nei limiti entro i quali debbono estendersi i $\sum$ rispetto a θ, i quali sono necessariamente differenti nei tre casi.

Così: se il punto P fosse sulla superficie stessa dell'involucro, (*Fig. 6*), l'angolo θ varierà da $\theta=0$ a $\theta=90^\circ$, ciò che risulta pure dalla formula (*d*); poichè quando $a=k$, si ha $\operatorname{sen}\varphi=1$, ossia $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Il processo seguíto per avere il valore di

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\varphi}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}},$$

si ripeterà anche in questo caso e ci darà ugualmente $\frac{k}{a^2}$.

Quindi

$$X=C\,2\pi\delta\frac{k^2}{a^2}\Delta k \quad , \quad Y=0 \quad , \quad Z=0 \quad ;$$

se non che non si dovrà più raddoppiare il valore di X, poichè nel caso attuale l'involucro è unico.

Se il punto fosse interno (*Fig.* 7), i limiti di θ sarebbero $\theta=0$ e $\theta=\pi$; poichè ora il cono che ha il vertice nel punto attratto P, intersecherebbe sempre la superficie sferica, passando successivamente per tutte le aperture, incominciando dall'essere nulla da una parte, e finendo dall'essere nulla dalla parte opposta. In questo caso, come nei precedenti,

$$DO=\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta} \quad ,$$

e questo DO, che per $\theta=0$, ha per valore $CB'=k$; per $\theta=\pi$, ha pure per valore $CA'=k$; sicchè

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Delta DO=0 \quad ;$$

ossia

$$\sum_{\theta=0}^{\theta=\pi} \Delta\sqrt{k^2-a^2 \operatorname{sen}^2\theta}=\sum_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Delta\theta}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}}=0 \quad .$$

Sostituendo questo valore nelle (5), si ha

$$X=0 \quad ; \quad Y=0 \quad ; \quad Z=0 \quad ;$$

cioè *la risultante dell' attrazione dell' involucro sferico sopra un punto interno, è nulla*.

Se indichiamo con m la massa dell' intiero involucro sferico, avremo

$$m=4\pi k^2 \Delta k \delta \quad ;$$

dunque: 1.° nel caso del punto esterno,

$$X=C\frac{m}{a^2} \quad ;$$

2.° nel caso del punto situato sulla superficie stessa dell' involucro,

$$X = \frac{1}{2} C \frac{m}{a^2} \quad ;$$

3.° nel caso del punto interno,

$$X = 0 \quad ;$$

le componenti delle attrazioni nelle altre due direzioni PY e PZ, essendo sempre nulle.

Scolio. La conclusione del terzo caso era facile a prevedersi a priori dopo il teorema dimostrato al §. 4, cioè che le attrazioni dei due elementi corrispondenti GN e G'N' sul punto P, sono eguali, e riflettendo inoltre che nel caso attuale le attrazioni di questi due elementi non sono più cospiranti, ma dirette in verso contrario.

7.

Ora riesce agevole passare dall'attrazione di uno strato sferico a quella di tutta la massa sferica. Le formule che ci debbono servire sono le (6'), avendo cura di prendere la somma di $k^2 \Delta k$ pei valori di k corrispondenti a tutti gli strati sferici, che hanno azione sul punto P.

Distingueremo perciò tre casi.

1.° Caso. *Punto esterno.*

I limiti di k saranno $k = 0$ e $k = R$, poichè tutti gl'infiniti strati concentrici della sfera di raggio $AC = R$ hanno azione sul punto P; onde le (6') diverranno

$$(7) \qquad X = C\delta \frac{4\pi}{a^2} \sum_{k=0}^{k=R} k^2 \Delta k \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ,$$

2.° Caso. *Punto sulla superficie della sfera.*

Sia P' il punto attratto (*Fig. 1*). Anche quì i limiti di k

saranno gli stessi che nel 1.° caso; se non che $a = R$; onde

$$(8) \qquad X = C\delta \frac{4\pi}{R^2} \sum_{k=0}^{k=R} k^2 \Delta k \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad .$$

3.° Caso. *Punto interno.*

Sia P″ il punto interno (*Fig. 1*). Immaginiamo condotta una superficie sferica pel punto P″ concentrica alla data AC; la risultante delle attrazioni di tutti gli strati, che compongono la cappa sferica compresa dalle superficie AC e P″C, sul punto P″ è nulla. Non resta ad agire su P″ che la sfera di raggio $CP'' = R'$. I limiti di k saranno dunque $k = 0$ e $k = R'$; onde

$$(9) \qquad X = C\delta \frac{4\pi}{R'^2} \sum_{k=0}^{k=R'} k^2 \Delta k \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad .$$

Ciò premesso, immaginiamo un triangolo ABC rettangolo in B (*Fig. 8*) ed avente i cateti

$$AB = BC = R \quad .$$

Prendiamo $CB'' = k$; e rappresentando con Δk un accrescimento infinitesimo di k, prendiamo $B'''B'' = B''B' = \ldots = \Delta k$; indi eleviamo le perpendicolari $B'''A'''$; $B''A''$; $B'A'$; ... a BC sino ad incontrare AC nei punti A''', A'', A' ec. Tutti i triangoli, che così risultano, saranno isosceli al pari di ABC.

Eleviamo $BE = R$ perpendicolare al triangolo ABC, indi costruendo il quadrato ABED, si congiungano i punti E e D con C. Ne risulterà una piramide P, la cui misura verrà data da

$$P = ABED . \frac{BC}{3} = \frac{R^3}{3} \quad .$$

Dai punti B′, B″, B‴...; A′, A″, A‴..., eleviamo delle perpendicolari ad ABC sino ad incontrare gli spigoli opposti CE, CD. La piramide P sarà così decomposta in tanti tronchi di piramide infinitamente sottili. Consideriamone una; quella che ha per altezza B″B‴; la sua misura sarà

$$\frac{\Delta k}{3}\left\{k^2+(k+\Delta k)^2+k(k+\Delta k)\right\}=\frac{\Delta k}{3}(3k^2+3k\Delta k)=k^2\Delta k \quad ,$$

avendo trascurato le potenze dell'infinitesimo Δk superiori alla lineare. La somma dei valori di tutti questi tronchi, ci darà la misura della piramide P, ossia

$$(e) \qquad \sum_{k=0}^{k=R} k^2\Delta k=P=\frac{R^3}{3} \quad .$$

Sostituendo questo valore in (7), avremo

$$X=C\delta\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{a^2} \quad ; \quad Y=0 \quad ; \quad Z=0 \quad ;$$

e chiamando M la massa della sfera AC, avremo

$$(f) \qquad M=\delta\frac{4}{3}\pi R^3 \quad ;$$

onde

$$(10) \qquad X=C\frac{M}{a^2} \quad ; \quad Y=0 \quad ; \quad Z=0 \quad ;$$

una sfera attrae dunque un punto esterno, come se tutta la massa fosse riunita al centro.

Se il punto attratto fosse sulla superficie della sfera AC, le (8), per la sostituzione del valore (e), si ridurrebbero

$$X=C\delta\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{R^2} \quad ; \quad Y=0 \quad ; \quad Z=0 \quad ;$$

ossia, avuto in riguardo la (f),

$$(11) \qquad X = C\frac{M}{R^2} \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ,$$

le quali corrispondono alle (10).

Le (11) possono anche scriversi così

$$(11') \qquad X = C\delta\,\tfrac{4}{3}\,\pi R \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

le quali ci dicono che *l'attrazione di una massa sferica sopra un punto situato sulla sua superficie, è proporzionale al suo raggio*.

Se il punto fosse interno, le (9) ci darebbero

$$X = C\delta\,\frac{4}{3}\,\pi\,\frac{R'^3}{R'^2} \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

ossia, chiamando M′ la massa della sfera di raggio R′;

$$X = C\frac{M'}{R'^2} \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

o anche

$$X = C\delta\,\tfrac{4}{3}\,\pi R' \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

l'attrazione della sfera sul punto interno è proporzionale alla distanza R′ *del punto stesso dal centro*.

Se il punto attratto fosse situato al centro della sfera, si avrebbe

$$X = 0 \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = 0 \quad ;$$

l'attrazione di una sfera su di un punto situato al suo centro, è nulla; ciò che per le cose premesse era facile di prevedere.

Scolio. Nei ragionamenti precedenti abbiamo sempre supposto δ costante, cioè che la sfera fosse omogonea.

Le conclusioni a cui siamo giunti, sussisterebbero ugualmente anche nella ipotesi di δ variabile, purchè costante in ciascuno strato.

8.

Ora siamo al caso di determinare l'attrazione reciproca di due sfere.

Sieno CA e PS' (*Fig, 1*) due sfere; ciascun punto della sfera CA sarà attratto dalla PS', come se tutta la massa di questa fosse concentrata al suo centro P.

Viceversa pel principio generale della *reazione uguale e contraria all'azione,* tutti i punti della sfera CA attrarranno il centro P della PS'; e l'attrarranno, come se essi fossero tutti concentrati nel centro C.

Dunque le due sfere si attirano come se le loro masse fossero concentrate nei rispettivi loro centri.

Corollario. Di quì viene che in astronomia si assuma per distanza reciproca di due corpi celesti, quella dei loro centri; e che questi centri sieno considerati come sede e come scopo della loro attrazione vicendevole.

F
E
G
D
X
T
D
O
C
B'

Prezzo L. 1. 50.